

## Aplicação da Linguagem Scheme aos Problemas da Mecânica Analítica

### Identificação:

Grande área do CNPq.: *Ciências Exatas e da Terra*  
Área do CNPq: *Física Clássica e Física Quântica; Mecânica e Campos*  
Título do Projeto: *Estudo de Mecânica Clássica com Modelagens Computacionais*  
Professor Orientador: *Valberto Pedruzzi Nascimento*  
Estudante PIBIC/PIVIC: *Eliezer de Souza da Silva*

*Resumo: A representação em ambiente computacional dos métodos da mecânica analítica, utilizando linguagens de programação funcional, permite simular e, em alguns casos, obter a solução numérica e simbólica de diversos problemas físicos clássicos. As linguagens de programação funcional são baseadas em definições e aplicações de funções e permitem a abstração da máquina durante a resolução dos problemas. Este subprojeto visa empregar a linguagem de programação funcional Scheme para desenvolver programas computacionais para a análise de fenômenos dinâmicos associados à Mecânica Clássica. Pretende-se assim aplicar métodos variacionais associados à Mecânica Analítica, expressos em linguagem funcional, na resolução de problemas de descrição de corpos rígidos, osciladores e estabilidade de órbitas.*

*Palavras chave: Mecânica Clássica, Simulações Computacionais, Análise Simbólica, Programação Funcional.*

### 1 – Introdução

A descrição Newtoniana da mecânica clássica é baseada na definição das forças envolvidas no movimento do corpo (ou sistema de partículas) e na resolução das respectivas equações de movimento. Quando todas as forças que agem sobre o sistema são conhecidas, podem-se obter as equações de movimento através da segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.1)$$

onde  $F$  é a força resultante sobre um dado sistema e  $p$  é o momento linear:

$$\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.2).$$

Para sistemas simples onde todas as forças são conhecidas *a priori* essa abordagem é favorável. No entanto, nem sempre é possível explicitar todas as forças, como no caso de sistemas vinculados, por exemplo, uma partícula restrita a uma superfície móvel, ou um pêndulo duplo oscilando num plano vertical fixo. Nestas situações a abordagem Newtoniana se torna inadequada (Sussman e Wisdom, 2001). Em suma, na mecânica Newtoniana, a determinação da *força* é fundamental na descrição do movimento.

A mecânica analítica surgiu como uma nova formulação matemática para descrever os princípios físicos fundamentais da mecânica clássica. Se por um lado a mecânica de Newton é baseada fundamentalmente em aspectos geométricos e vetoriais, tal como a força, na mecânica analítica o movimento do sistema pode ser expresso por grandezas escalares (ângulos, energia, etc). No formalismo

lagrangiano emprega-se uma grandeza escalar, que para muitos sistemas pode ser definida como a diferença entre energia cinética e potencial, chamada de Lagrangiana do Sistema, dependente somente do tempo, da configuração e da taxa de variação da configuração do sistema. Através da aplicação do princípio de "*Mínima Ação*" (conhecido também como *princípio de Hamilton*) na solução da integral da Lagrangiana, pode-se distinguir, dentre todas as possíveis, aquela que é a trajetória real do sistema. A trajetória que satisfaz este princípio é a solução de uma equação diferencial, conhecida por equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.3).$$

onde  $L$  representa a Lagrangiana do sistema,  $q_i$  representa as chamadas coordenadas generalizadas do sistema e  $\dot{q}_i$  suas derivadas temporais (Marion; Thornton, 1995).

Essa formulação traz uma série de conveniências e generalizações sobre a Newtoniana: (i) não é mais necessário conhecer todas as forças que atuam sobre o sistema, pois seu estado é totalmente descrito por uma função escalar  $L$  (Lagrangiana do sistema), que pode ser encontrada em termos da energia; (ii) a equação de *Euler-Lagrange* pode ser utilizada para qualquer sistema de coordenadas generalizadas. Utilizando essas coordenadas, pode-se descrever univocamente a configuração do sistema a cada instante, obedecendo às restrições de natureza cinemática impostas ao movimento, sem, no entanto, existirem equações de vínculos. Assim, um sistema com  $n$  coordenadas cartesianas e  $p$  equações de vínculos pode ser reduzido para um sistema com  $n-p$  coordenadas generalizadas, onde existe  $n-p$  graus de liberdade e, consequentemente,  $n-p$  equações independentes de Euler-Lagrange (Lemos, 2004).

A representação em ambiente computacional dos métodos da mecânica analítica na solução das equações de Euler-Lagrange, relativas a diferentes sistemas físicos, permite criar programas que descrevam toda formalização do problema e que possam ser testados, visualizados, e, em alguns casos, generalizados (Sussman; Wisdom, 2001). Para este tipo de modelagem computacional de fenômenos físicos, o uso das linguagens de programação funcional (LPF) pode ser uma interessante alternativa, pois permite que o movimento do sistema seja simulado, sem que para isto seja necessário resolver analiticamente as equações de Euler-Lagrange, que em alguns casos envolvem cálculos não triviais. Neste tipo de linguagem, os algoritmos e programas são expressos através de definições de funções e permitem ao programador uma abstração da máquina, focalizando a descrição e resolução do problema (Sussman e Wisdom, 2002). Sussman e Wisdom (2002) ainda ressaltam que a tarefa de expressar computacionalmente os métodos da mecânica analítica pode levar a uma compreensão mais profunda da Mecânica Clássica, representando um importante exercício no aprendizado dos métodos analíticos, além de forçar o uso de uma notação não-ambígua e clareza na análise.

Para demonstrar a potencialidade da aplicação das LPF, neste projeto é apresentada uma simulação computacional do pêndulo simples não linear e do pião simétrico com um ponto fixo, utilizando a linguagem Scheme, um dialeto da linguagem Lisp, com uma sintaxe simples, clara e com poucas regras (Abelson; Sussman, 1996). Scheme conta com uma biblioteca, conhecida por *Scmutils*, que

implementa operadores genéricos da linguagem sobre uma variedade de objetos matemáticos e contém ricas ferramentas de processamento simbólico e numérico (Sussman; Wisdom, 2001).

## 2 – Objetivos

O objetivo primeiro deste subprojeto é o estudo da Mecânica Clássica fazendo uso do ferramental teórico da Mecânica Analítica descrito em linguagem de programação funcional. Pretende-se assim avaliar a adequação de linguagens de programação funcional, especificamente a linguagem Scheme em conjunto com a biblioteca *Scmutils*, na descrição e simulação de sistemas físicos clássicos.

Ao aplicar métodos e abordagens variados na simulação dos sistemas físicos propostas é esperado gerar um ferramental computacional que poderá ser utilizado na análise de sistemas distintos dos propostos neste subprojeto.

## 3 – Metodologia

O Estudo da linguagem Scheme se deu através de um estudo dirigido do material de referência *How to Design Programs* (Felleisen et al, 2001) e *Structure and Implementation of Computer Programs* (Abelson; Sussman, 1996). O aluno elaborou desenvolveu programas relevantes para o projeto e efetuou experimentos numéricos no intuito de explorar as potencialidades da linguagem de programação. O acompanhamento dos avanços do aluno foi feito através de reuniões semanais e seminário com o grupo de pesquisa.

Os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano foram abordados seguindo os livros da referência Lemos (2002), Marion e Thornton (1996) e Whittaker (1917), além de notas de aula preparadas pelo orientador. Para cada assunto tratado foram feitas reuniões periódicas onde o bolsista apresentou demonstrações dos principais resultados e exemplos relevantes.

Na etapa de implementação e simulação foram definidos dois sistemas físicos para serem estudados: o pêndulo não-linear e o pião simétrico com um ponto fixo. A modelagem matemática é efetuada de modo a obter a expressão da lagrangiana em função das coordenadas generalizadas que descrevem o movimento do sistema. Partindo da lagrangiana deve-se obter a equação do movimento associada a cada coordenada generalizada através da equação de Euler-Lagrange, gerando um sistema de equações cuja solução representa a trajetória do sistema. A modelagem computacional é feita seguindo o seguinte procedimento: como passo inicial, descreve-se a lagrangiana em linguagem funcional, em seguida gera-se um sistema de equações e finalmente é feita a simulação, que consiste em resolver numericamente o sistema gerado. A biblioteca *Scmutils* associada à linguagem Scheme disponibiliza funções que permitem gerar o sistema de equações diferenciais dado a lagrangiana do sistema e também resolver numericamente um sistema de equações diferenciais (Sussman; Wisdom, 2001).

Os resultados da simulação são comparados com os resultados analíticos (solução do sistema de equações gerada para cada coordenada generalizada) com o intuito de validação da simulação. Um primeiro resultado a ser comparada é o gráfico gerado pela simulação e pela solução exata analítica. Os critérios de comparação gráfica são: formato do gráfico, pontos de zeros, pontos de máximo e período de

oscilação (caso seja periódico). Uma análise mais aprofundada pode ser feita considerando o erro absoluto entre os valores calculado usando a solução exata analítica e a simulação no ambiente Scheme.

#### 4 – Resultados e Discussões

Dentro do estipulado no cronograma do projeto, o aluno revisou a linguagem Scheme, apresentando um pequeno seminário interno ao grupo de pesquisa, onde foram feitas demonstrações de alguns programas escritos em Scheme com o intuito de explorar as potencialidades e adequação da programação funcional em Scheme à modelagem computacional e simulação de sistemas físicos.

Seguiu-se o estudo dos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano e simulações computacionais. Alguns Tópicos estudados pelo bolsista foram: dinâmica e cinemática de corpos rígidos, ângulos de Euler, tensor de inércia e movimento do pião simétrico com um ponto fixo. Além destes tópicos, foi necessário um breve estudo de funções elípticas, visto que as soluções analíticas dos dois problemas atacados envolviam esta classe de funções matemáticas.

##### 4.1 – Pêndulo Simples Não-Linear

O primeiro sistema físico simulado e analisado foi o pêndulo simples não-linear. A lagrangiana do pêndulo foi encontrada em função da coordenada generalizada  $\theta$ , que representa o ângulo entre o pêndulo e a vertical. Na figura seguinte temos um diagrama representando o pêndulo e as grandezas envolvidas na determinação do comportamento do pêndulo.

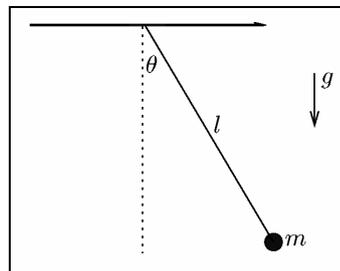


Figura 1. Representação esquemática do pêndulo simples sob ação da gravidade, onde  $\theta$  é o ângulo entre o pêndulo e vertical,  $l$  é o comprimento,  $m$  a massa do pêndulo e  $g$  a gravidade.

A lagrangiana pode ser obtida como a diferença entre a energia cinética  $T$  e a energia potencial  $V$ . Escrevendo a energia cinética e potencial em termos dos parâmetros considerados no esquema acima obtemos a seguinte expressão para a lagrangiana.

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) \quad (4.1).$$

Aplicando esta lagrangiana à equação de Euler-Lagrange obtém-se a seguinte equação diferencial que rege o movimento do pêndulo simples não-linear.

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \end{cases} \quad (4.2).$$

Belendez *et al.* (2007) resolvem a equação diferencial e escrevem a solução em termos da função elíptica de Jacobi  $sn(u;m)$  e da integral elíptica completa do primeiro tipo  $K(m)$  (Armitage; Eberlein, 2006). Considerando as seguintes condições iniciais:  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\dot{\theta}(0) = 0$ , a solução encontrada é:

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left\{ \sin \theta_0 \cdot sn \left[ K \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) - \omega_0 t; \sin^2 \theta_0 \right] \right\} \quad (4.3)$$

Seguem os gráficos gerados a partir da solução analítica (utilizando o software GNU Octave), da simulação feita no ambiente *Scmutils* e a erro absoluto entre estes valores.

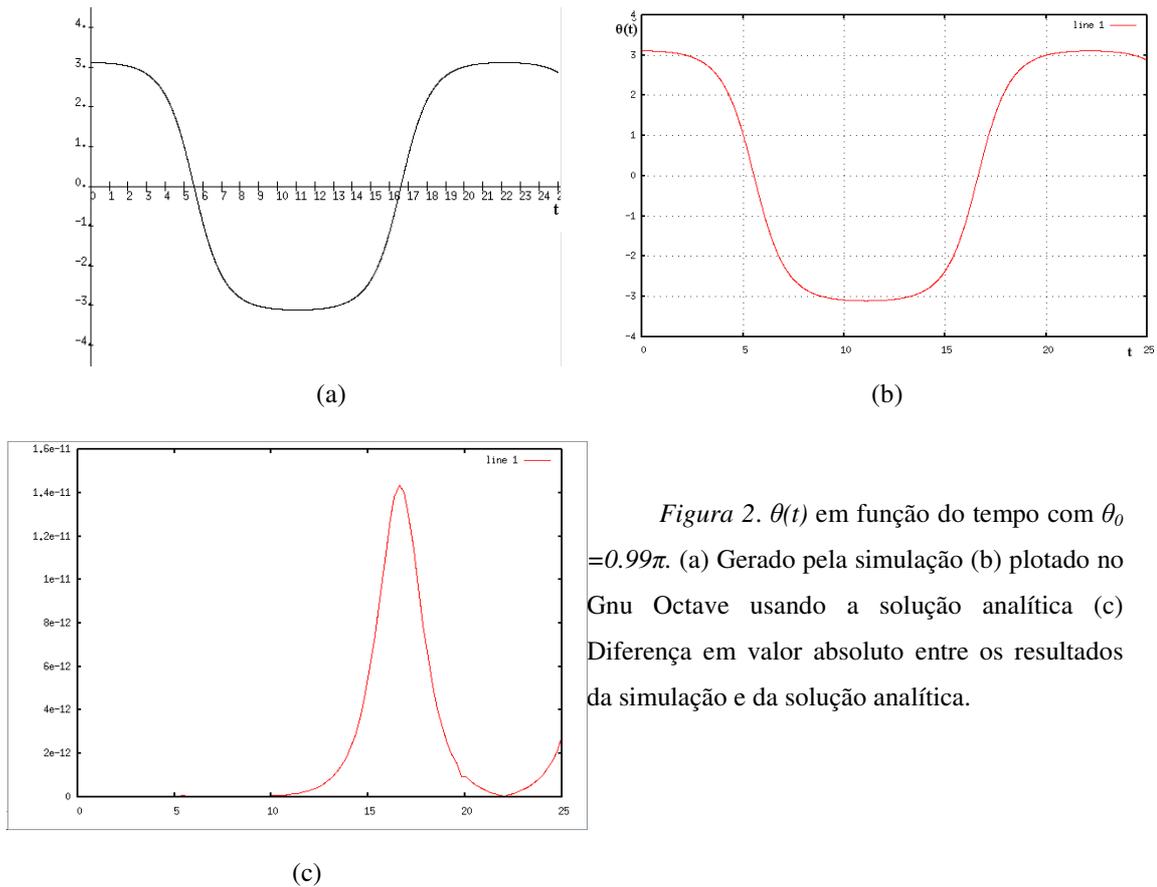


Figura 2.  $\theta(t)$  em função do tempo com  $\theta_0 = 0.99\pi$ . (a) Gerado pela simulação (b) plotado no Gnu Octave usando a solução analítica (c) Diferença em valor absoluto entre os resultados da simulação e da solução analítica.

Podemos observar que para este valor de  $\theta_0$ , o comportamento da solução se desvia consideravelmente do oscilador harmônico, que é solução do problema do pêndulo quando se lineariza o sistema. Vale notar que a simulação acompanha o comportamento da solução exata analítica e que o erro absoluto máximo é da ordem de  $10^{-11}$ .

#### 4.2 – Pião Simétrico com um ponto fixo sob ação da gravidade.

O pião simétrico (figura 3) é um corpo rígido de massa  $M$  que apresenta simetria em torno de um eixo e apresenta um vértice no fim deste eixo. O pião gira em torno de um ponto fixo  $O$  no eixo de simetria a uma distância  $h$  do centro de massa. As forças externas consideradas neste caso são as de vínculos e a da gravidade (Whittaker, 1917).

Consideremos  $(A, A, C)$  os principais momentos de inércia do pião em torno de um referencial retangular fixo em relação ao pião  $(x_1, x_2, x_3)$  e movendo junto com o pião (eixos rotativo). Os ângulos de Euler  $(\theta, \phi, \psi)$  definem a posição dos eixos do pião em relação a um eixo inercial fixo  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Os ângulos de Euler definem a transformação de coordenadas através de uma matriz de rotação (Marion; Thornton, 1996).

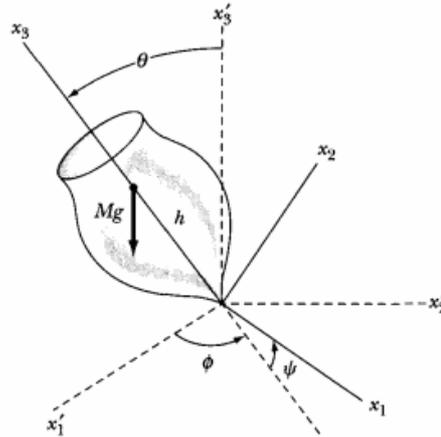


Figura 3. Representação esquemática do pião simétrico sob ação da gravidade e os ângulos de Euler,  $\theta$  é o ângulo entre o eixo de simetria e a vertical,  $\phi$  é o ângulo de rotação em relação ao eixo fixo horizontal e  $\psi$  é a rotação em torno do próprio eixo de simetria do corpo.

Para um corpo rígido qualquer pode-se calcular a energia cinética como

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (4.4),$$

onde  $T_i$  é o  $i$ -ésimo momento de inércia principal e  $\omega_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor velocidade angular (Marion; Thornton, 1996).

No caso do pião simétrico, considerando os momentos de inércia  $(A, A, C)$  e o vetor velocidade angular escrito em função dos ângulos de Euler, obtém-se

$$T = \frac{A}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{C}{2} \omega_3^2 = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (4.5).$$

Assim, considerando a relação  $V = Mgh \cos \theta$ , tem-se a expressão da lagrangiana do pião simétrico:

$$L = T - V = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgh \cos \theta \quad (4.6).$$

As coordenadas  $\phi$  e  $\psi$  são ignoráveis, visto que  $\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ . Assim obtemos as

correspondentes integrais das equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = b \text{ e } \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = a \quad (4.7),$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes.

Derivando às respectivas expressões obtemos as relações para as constantes  $a$  e  $b$ :

$$\begin{cases} a = A\dot{\phi}\sin^2\theta + C(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta = A\dot{\phi}\sin^2\theta + b\cos\theta, \\ b = C(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta). \end{cases} \quad (4.8).$$

Visando simplificar o sistema de equações, Whittaker (1917) sugere uma alteração (invariante em relação à equação de Euler-Lagrange) na expressão da lagrangiana do pião:

$$\begin{aligned} R &= L - a\dot{\phi} - b\dot{\psi} \\ R &= \frac{A}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{(a - b\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} - \frac{b^2}{2C} - Mgh\cos\theta \end{aligned} \quad (4.9).$$

Visto que a relação  $\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$  é válida, então  $R$  reduz o problema do pião para uma única dimensão. As outras coordenadas podem ser calculados por simples integrações sucessivas, de modo que todos os esforços devem ser concentrados em resolver o sistema unidimensional equivalente. O termo  $b^2/2C$  pode ser ignorado por se tratar de somente uma constante. A energia cinética do sistema reduzido é  $\frac{A}{2}\dot{\theta}^2$  e o potencial efetivo é  $\frac{(a - b\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + Mgh\cos\theta$ . Ao aplicar a conservação de energia mecânica obtemos uma equação diferencial para  $\theta(t)$ :

$$\frac{A}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{(a - b\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} - Mgh\cos\theta + c \quad (4.10),$$

onde  $c$  é uma constante determinada pelos valores iniciais de  $(\theta, \phi, \psi)$  e suas derivadas temporais.

Escrevendo  $x = \cos(\theta)$  e reescrevendo a equação (4.10) tem-se:

$$A^2\dot{x}^2 = -(a - bx)^2 - 2AMgh(x - x^3) + 2Ac(1 - x^2) = f(x) \quad (4.11).$$

Podemos fazer algumas observações relativas a  $f(x)$  e à equação (4.11):

$$\begin{cases} f(1) = -(a - b)^2 < 0, \\ f(-1) = -(a + b)^2 < 0, \\ -1 < x = \cos\theta < 1, \\ A\dot{x}^2 = f(x) > 0. \end{cases}$$

Portanto, para que o sistema tenha uma solução física válida,  $f(x)$  deve ser positiva em algum intervalo  $I \subseteq [-1, 1]$ . Conseqüentemente  $f(x)$  deve possuir três raízes reais (polinômio de grau 3) distintas  $\cos(\alpha)$ ,  $\cos(\beta)$  e  $\cosh(\gamma)$  que satisfazem:

$$-1 < \cos\alpha < \cos\beta < 1 < \cosh\gamma \quad (4.12).$$

Fatorando o polinômio  $f(x)$  obtemos a seguinte equação:

$$\frac{2A}{Mgh}\dot{x}^2 = 4(x - \cos\alpha)(x - \cos\beta)(x - \cosh\gamma) \quad (4.13).$$

Seja a seguinte mudança de variável:

$$x = \frac{2A}{Mgh}z + \frac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cosh\gamma) = \frac{2A}{Mgh}z + \frac{2Ac + b^2}{6AMgh} \quad (4.14).$$

Invertendo a relação e aplicando para cada raiz do polinômio  $f(x)$  obtemos as constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{Mgh}{2A} \cosh \gamma - \frac{2Ac + b^2}{12A^2}, \\ e_2 = \frac{Mgh}{2A} \cos \beta - \frac{2Ac + b^2}{12A^2}, \\ e_3 = \frac{Mgh}{2A} \cos \alpha - \frac{2Ac + b^2}{12A^2}, \\ e_3 < e_2 < e_1, \\ e_3 + e_2 + e_1 = 0, \\ g_2 = -2(e_3 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_1), \\ g_3 = 4e_3 e_2 e_1 \end{array} \right. \quad (4.15).$$

Aplicando estas relações na equação 4.13 obtemos a equação equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{z}^2 = f(z) &= 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3) = 4z^3 - g_2 z - g_3 \\ t + \varepsilon &= \int 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)^{-\frac{1}{2}} dz \end{aligned} \quad (4.16).$$

A solução desta equação é a função elíptica de Weierstrass  $z(t) = \wp(t + \varepsilon)$  (Whittaker, 1917). Essa função é uma função complexa duplamente periódica (periódica no eixo real e imaginária, com períodos  $2\omega_1$  e  $2\omega_3$ ) e satisfaz as relações:

$$\begin{aligned} \wp(z + n\omega_1 + m\omega_3) &= \wp(z), n \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_3}\right) \neq 0, \\ \wp'(z)^2 &= 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \\ \wp'(z)^2 &= 4(\wp(z) - \wp(\omega_1))(\wp(z) - \wp(\omega_2))(\wp(z) - \wp(\omega_3)) \\ e_i &= \wp(\omega_i) \end{aligned} \quad (4.17) \text{ (Armitage; Eberlein, 2006).}$$

Whittaker e Watson (1927) mostram que, se as raízes do polinômio  $e_3 < e_2 < e_1$  são todas reais, então  $\omega_1$  é real e  $\omega_3$  é imaginário puro. Posto isso, lembrando que  $0 < \theta < \pi$  e  $\beta < \theta < \alpha$  (desigualdade 4.12), e considerando  $\theta(0) = \theta_0 = \beta$ , podemos verificar que  $z(t) = \wp(t + \varepsilon)$  deve estar entre as raízes  $e_3$  e  $e_2$  para todo  $t$  real positivo:

$$e_3 < \wp(t + \varepsilon) < e_2, t \in \mathfrak{R}^* \quad (4.18).$$

Uma vez que  $\omega_3$  é puramente imaginário e que  $e_3 = \wp(\omega_3)$ , então a parte imaginária da constante  $\varepsilon$  será  $\omega_3$ . No instante inicial  $x(0) = \cos(\theta_0) = \cos(\beta)$  e dado que  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$  (Armitage; Eberlein, 2006), constata-se que

$$\begin{aligned} \wp(t + \varepsilon)|_{t=0} &= e_2 = \wp(\omega_2) = \wp(-\omega_3 - \omega_1) \\ &= \wp(-\omega_3 - \omega_1 + 2\omega_3 + 2\omega_1) = \wp(\omega_3 + \omega_1) = \wp(\omega_3 + \operatorname{Re}\{\varepsilon\}) \end{aligned} \quad (4.19).$$

Finalmente podemos agora escrever uma solução para o problema do pião, em termos da função elíptica  $\wp(t)$  e levando em conta uma inclinação inicial  $\theta(0) = \theta_0$ :

$$\theta(t) = \frac{2A}{Mgh} \wp(t + \omega_1 + \omega_3) + \frac{2Ac + b^2}{6AMgh}, \quad (4.20)$$

onde  $e_3 < e_2 < e_1$  são raízes do polinômio  $f(z)$  e  $\wp(\omega_i) = e_i$ .

Para efetuar a modelagem computacional do pião, utilizou-se a expressão do lagrangiano alterado R, com o potencial efetivo. A seguir estão as principais funções implementadas na simulação computacional do pião simétrico.

```
(define (L-piao m g l R psi-dot phi-dot theta) ;; lagrangiana do pião
  (lambda (local)
    (let ((q (coordinate local))
          (v (velocity local))
          (A (inertia-xx m g l R)) ;;momentos de inercia
          (C (inertia-zz m g R)))
      (let ((a (p-phi A C psi-dot phi-dot theta)) ;;constantes a e b
            (b (p-psi C psi-dot phi-dot theta)))
        (- (* (/ A 2) (square v))
           (+
            (/
             (square (- a (* b (cos q))))
             (* 2 A (square (sin q))))
            (* m g l (cos q)))))))

(define (pend-sysder m g l R psi-dot phi-dot theta) ;;derivada do estado do sistema
  (Lagrangian->state-derivative
   (L-piao m g l R psi-dot phi-dot theta)))

((evolve pend-sysder ;;faz a evolução dinâmica do sistema
  10 ;;m
  9.8 ;;g
  1 ;;l
  2 ;; R
  0.1 ;;psi-dot inicial
  0 ;;phi-dot inicial
  1.1) ;;theta inicial
 (up 0 1.1 0) ;;tinicial,theta-inicial e theta-dot inicial
 (monitor-novo gr) ;;gera o gráfico
 0.001 ;;incremento de tempo a cada iteração
 6.0 ;;tempo final
 1.0e-9) ;;precisão
```

Para fins comparativos foram gerados gráficos do ângulo de *nutação*  $\theta(t)$  (Sussman; Wisdom, 2001) dado pela equação (4.20) utilizando o software MATHEMATICA e também com os resultados da simulação no ambiente *Scmutils*.

O primeiro conjunto de gráficos foi gerado utilizando as condições iniciais e momentos de inércia dado por Sussman e Wisdom (2001) (pião construído juntando uma haste e um disco circular):  $B=0.000066 \text{ kg.m}^2$ ,  $A=0.000328 \text{ kg.m}^2$ ,  $Mgh=0.0456 \text{ kg.m}^2\text{s}^{-2}$ ,  $\psi_0 = \dot{\theta}_0 = \phi_0 = 0$ ,  $\dot{\psi}_0 = 140\text{rad/s}$ ,  $\theta_0 = 0.1\text{rad}$ ,  $\dot{\phi}_0 = -15\text{rad/s}$ .

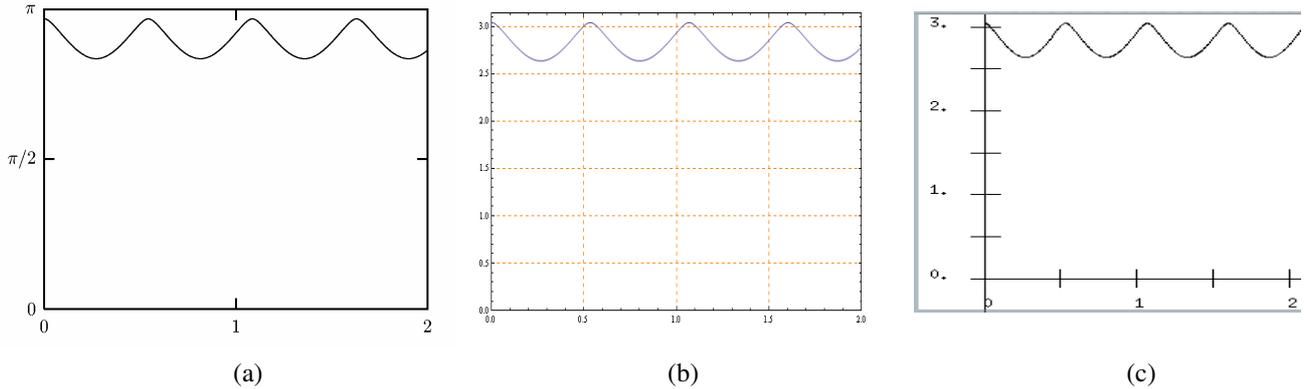


Figura 4. Ângulo de nutação  $\pi-\theta(t)$  em função de tempo para o conjunto de dados definidos por Sussman e Wisdom (*Structure and Interpretation of Classical Mechanics*, 2001, pg. 149). (a) gráfico tirado do livro de Sussman e Wilson (2001); (b) gerado pelo software MATHEMATICA usando a solução analítica; (c) resultado da simulação no ambiente *Scmutils* (Scheme).

Para os gráficos a seguir consideramos um pião cônico com as seguintes especificações:  $M=10$  kg,  $g=9.8$  ms<sup>-2</sup>,  $R=2$ m e  $L=1$ m,  $\psi_0 = \dot{\theta}_0 = \phi_0 = \dot{\phi}_0 = 0$ ,  $\dot{\psi}_0 = 0.1$ rad/s,  $\theta_0 = 1.1$ rad.

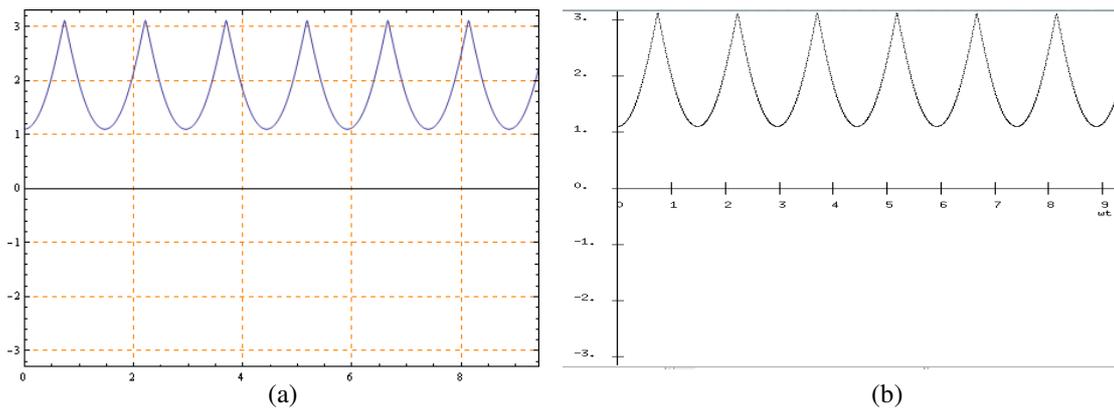


Figura 5. Ângulo de nutação  $\theta(t)$ : (a) gerado pelo software MATHEMATICA usando a solução analítica; (b) resultado da simulação no ambiente *Scmutils* (Scheme).

Para o próximo exemplo todos os valores são iguais ao do primeiro exemplo, exceto que o pião é cônico e tem dimensões distintas do primeiro:  $M=0.1$  kg,  $R=0.01$ m e  $L=0.9$ m.

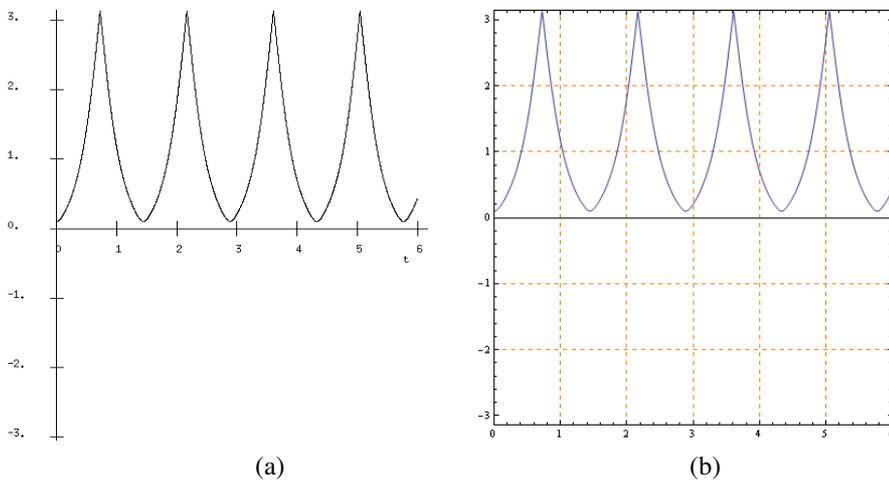


Figura 6. Ângulo de nutação  $\theta(t)$ : (a) gerado pelo software MATHEMATICA usando a solução analítica; (b) resultado da simulação no ambiente *Scmutils* (Scheme).

## 5 – Conclusões

A linguagem de programação funcional Scheme, em conjunto com a biblioteca *Scmutils*, mostrou ser eficiente na simulação do movimento do pêndulo simples não-linear e do pião simétrico, utilizando um procedimento que consiste em descrever a Lagrangiana computacionalmente, aplicar as equações de Euler-Lagrange para gerar um sistema de equações e resolvê-lo para encontrar a equação da trajetória. O erro máximo encontrado entre a solução analítica exata e aquela obtida pela simulação para o caso do pêndulo simples é menor que  $10^{-11}$  para os primeiros 25s no caso mais desfavorável ( $\theta_0=0.99\pi$ ). Foi verificado também, através da análise gráfica, que para diferentes configurações iniciais do sistema físico do pião simétrico os resultados da simulação concordam com os resultados obtidos através da solução analítica exata.

O uso de uma linguagem de programação funcional para descrever e simular sistemas físicos clássicos aplicando métodos da mecânica analítica tem um valor didático importante, visto que encoraja a precisão e formalidade na descrição dos métodos utilizados na simulação, visto que o computador não tolera descrições vagas ou construções incompletas (Sussman; Wisdom. 2002).

Os exemplos descritos acima mostram o potencial da utilização da linguagem Scheme na simulação de problemas de mecânica analítica, em situações onde se espera uma resposta rápida do comportamento geral do sistema, sem que haja a necessidade do fornecimento de uma solução analítica formal.

## 6 – Referências Bibliográficas

- Lemos, N. A.; *Mecânica Analítica*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004.
- Marion, J. B.; Thornton, S. T. *Classical Dynamics of particles and Systems*, 4a Ed., Saunders College Publishing, Philadelphia, 1995.
- Sussman, G. J; Wisdom, J. *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*, MIT Press, Cambridge, 2001.
- Abelson, H.; Jay Sussman, G. J. *Structure and Implementation of Computer Programs*, 2ª ed, MIT Press, USA, 1996.
- Felleisen, M.; et al. *How to Design Programs – An Introduction to Computing and Programming*, MIT Press, Cambridge, 2001.
- Sussman, G. J.; Wisdom, J. *The Role of Programming in the Formulation of Ideas*, Artificial Intelligence Laboratory memo AIM-2002-018, Cambridge, 2002.
- Beléndez, A. et al. Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 29, n. 4, 2007.
- Whittaker, E.T. *A Treatise on The Analytic Dynamics of Particles and Rigid Bodies; With an Introduction to The Problem of Three Bodies*. 2ª ed, Cambridge Press, Cambridge, 1917.
- Armitage, J V.; Eberlein, W. F. *Elliptic Functions*. Cambridge Press, Cambridge, 2006.
- Whittaker, E. T.; Watson, G. N. *A Course of Modern Analysis*. 4ª edição. Cambridge University Press, New York, 1927.